Teoría de la firma:

- Existen J firmas, $j \in \{1, \dots, J\}$
- Producción: $y_j = f_j(\ell) \longrightarrow \ell$ es el único factor de producción.
- f satisface: ① f es creciente $(f' > 0)$
  ② f es cóncava $(f'' < 0) \longrightarrow$ rendimientos decrecientes a escala.
- f es Cobb-Douglas: $f_j(\ell) = A_j \ell^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

$$\boxed{f_j(\ell) = \tilde{A}_j \bar{k}^{\alpha} \ell^{1-\alpha}}, \quad A_j = \tilde{A}_j \bar{k}^{\alpha}$$

- α tiene 2 interpretaciones:
  ① $(1-\alpha)$ es la elasticidad de la producción con respecto a la mano de obra: $\frac{\partial f}{\partial \ell} \cdot \frac{\ell}{f} = (1-\alpha)$

  $\alpha = 1 \Rightarrow f_j(\ell) = A_j \Rightarrow (1-\alpha) = 0 \leftarrow$ elasticidad
  $\alpha = 0 \Rightarrow f_j(\ell) = A_j \ell^1 \Rightarrow (1-\alpha) = 1$

  ② α determina los rendimientos decrecientes a escala.
  $\alpha = 0 \Rightarrow$ no hay rendimientos decrecientes a esala.
  Hay rendimientos constantes a escala.

- A_j : productividad total de los factores (TFP)
- A_j aumenta: ① Aumenta la producción total de la firma
  ② Aumenta la productividad marginal del trabajo:
  $f'(\ell) = (1-\alpha) A_j \ell^{-\alpha}$

- Problema de la firma:

$$\max_{\ell} \; P y_i - w\ell = \max_{\ell} \; \underbrace{P A_i \ell^{1-\alpha} - w\ell}$$

Derivando e igualando a cero:

$$(1-\alpha) P A_i \ell^{-\alpha} - w = 0 \iff \frac{(1-\alpha) P A_i}{\ell^{\alpha}} = w$$

$$\frac{(1-\alpha) P A_i}{w} = \ell^{\alpha} \implies \ell^* = \left(\frac{(1-\alpha) A_i P}{w}\right)^{1/\alpha}$$

$$\boxed{\ell^* = \left(\frac{(1-\alpha) A_i}{w/P}\right)^{1/\alpha}} \longrightarrow \text{Demanda laboral de la firma.}$$

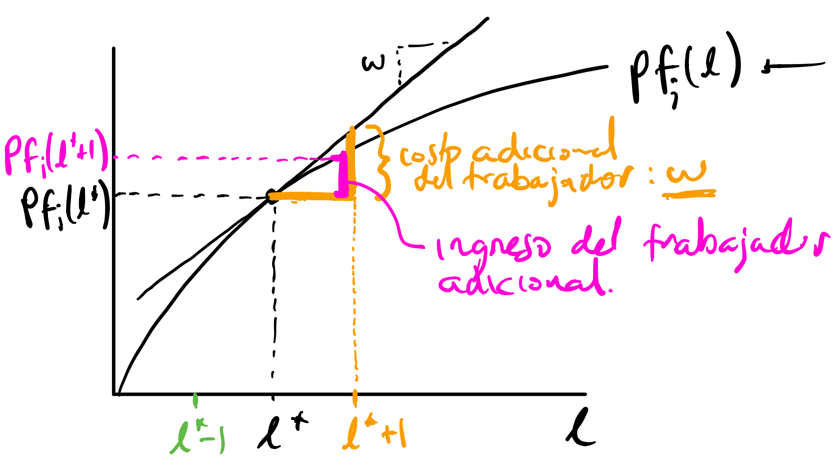
└ Depende negativamente del salario real $\frac{w}{P}$

En términos generales:

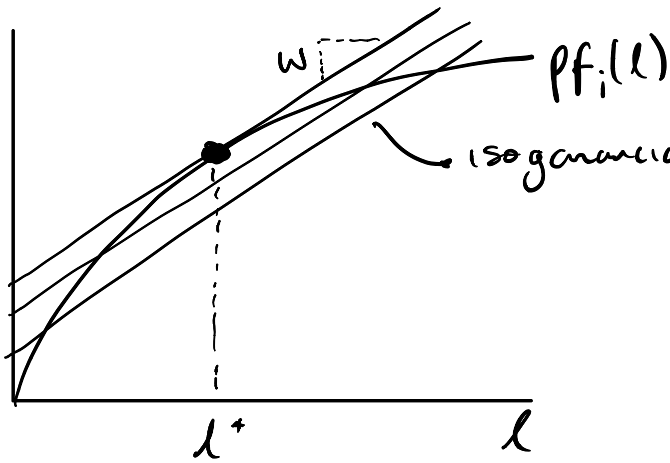
$$\max_{\ell} \; P f_i(\ell) - w\ell$$

Derivando: $P f_i'(\ell) - w = 0 \iff \boxed{P f_i'(\ell) = w}$ (*)

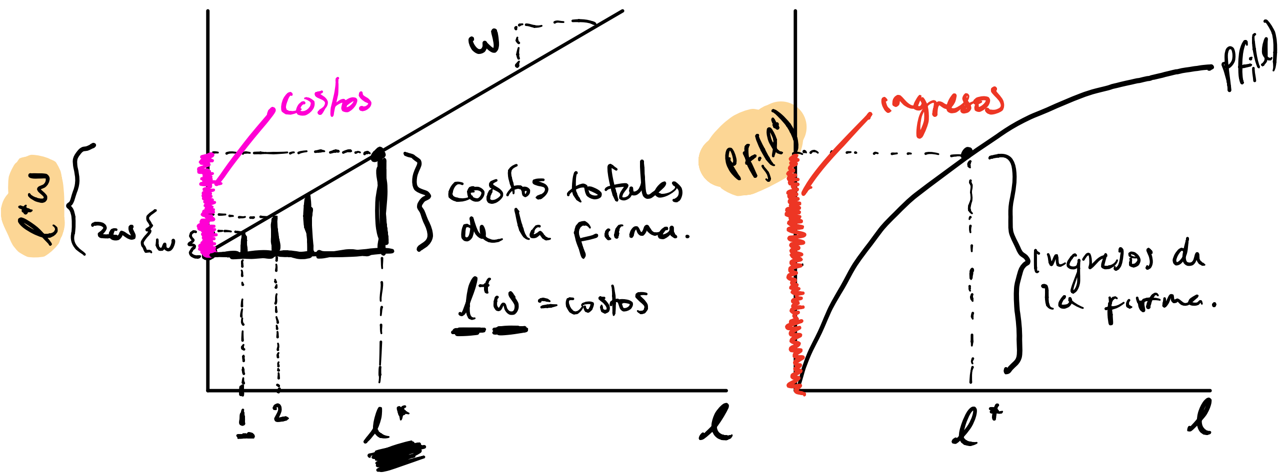
En el óptimo: $\underbrace{P f_i'(\ell^*(w,P))}_{\text{valor productividad marginal del trabajo}} = \underbrace{w}_{\text{costo marginal del trabajo}}$ ← condición de optimalidad de la firma.

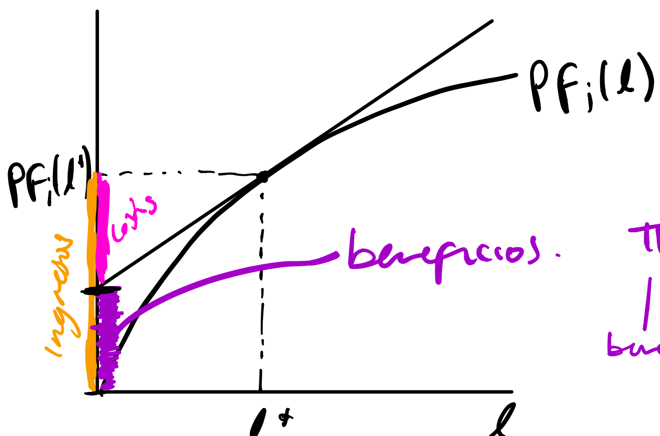


La firma no tiene incentivos a contratar una cantidad distinta de trabajo a ℓ^*.



isoganancia: líneas con pendiente w.





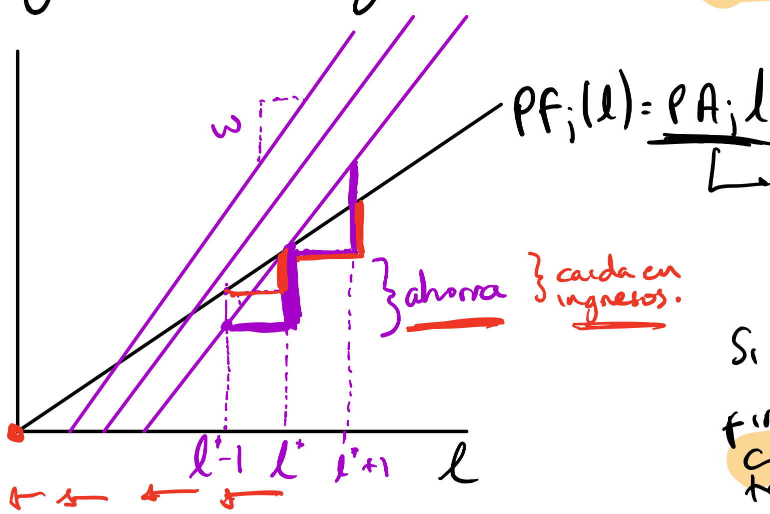
$$\underset{\text{beneficios}}{\pi} = \underbrace{pf_i(l^*)}_{\text{ingresos}} - \underline{wl^*}_{\text{costos.}}$$

El punto en el que la isoganancia se cruza con el eje vertical son los beneficios de la firma.

En el óptimo, la firma tiene ganancias positivas. Esto depende crucialmente de dos supuestos:

1. Rendimientos decrecientes a escala (f es cóncava)
2. No hay costos fijos (la función de ingresos parte del origen)

Supongamos que hay rendimientos constantes a escala:

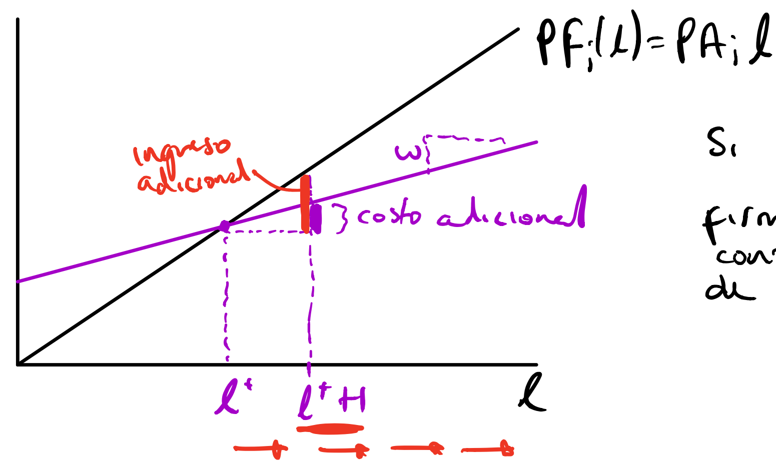


pendiente de la curva de ingresos es:

PA_j

Si $w > PA_j$:

firma va a contratar cero unidades de trabajo.

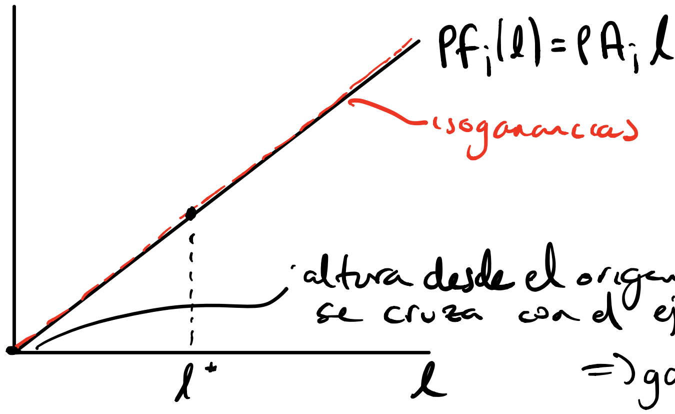


Si $w < PA_j$:

firma tiene incentivos a contratar infinitas unidades de trabajo

En equilibrio, ninguno de estos casos puede ocurrir:

$w = PA_j$

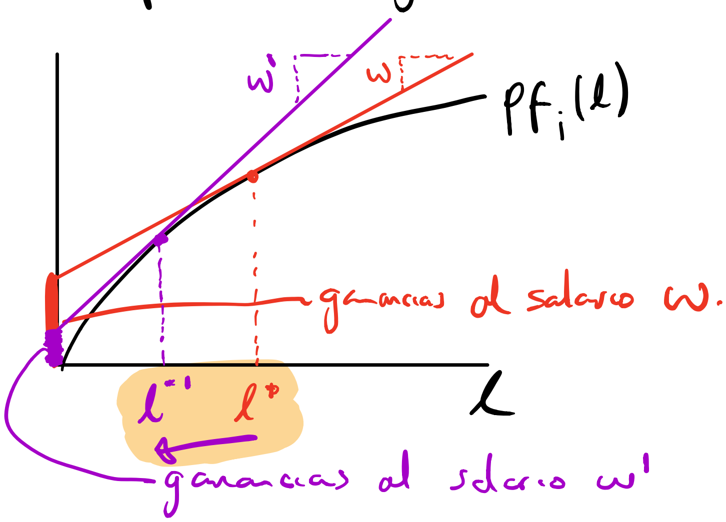


altura desde el origen hasta que isoganancia se cruza con el eje vertical es cero.

$\Rightarrow$ ganancias $= 0$.

Rendimientos constantes a escala $\Rightarrow$ ganancias $= 0$.

¿Cómo dependen las ganancias del salario w?



$w' > w$

Las ganancias dependen negativamente del salario w.

Problema de la firma:

$$\max_{l}\ PA_j\, l^{1-\alpha} - w\, l \quad \Rightarrow \quad \boxed{l^*(w,P) = \left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/P}\right)^{1/\alpha}}$$

$\frac{\cancel{\partial} w}{\cancel{\partial} P}$

Producción: $y_j = f_j(l)$

$$\Rightarrow \underline{y^*(w,P)} = A_j\, l^*(w,P)^{1-\alpha}$$

$$\boxed{y^*(w,p) = A_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \longrightarrow \text{oferta del bien final.}$$

$$\underbrace{\pi^*(w,p)}_{\text{ganancias}} = \underbrace{p\,y^*(w,p)}_{\text{ingresos}} - \underbrace{w\,\ell^*(w,p)}_{\text{costos.}}$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1$$

$$\pi^*(w,p) = pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - w\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{1/\alpha}$$

$$= pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} - w\,\frac{\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{1/\alpha}}{\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)} \cdot \left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)$$

$$= \left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$= pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} - \cancel{w}\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{\cancel{w}/p}\right)$$

$$= pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} - (1-\alpha)pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$= \underbrace{(1-(1-\alpha))}_{\cancel{1}-\cancel{1}+\alpha=\alpha}\,pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$\boxed{\pi^*(w,p) = \alpha pA_i\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \longrightarrow \text{ganancias de la firma.}$$

Qué proporción de los ingresos de la firma se destina a remunerar al trabajo?

Es decir, cuánto es $\boxed{\frac{w\ell^*}{py^*}}$?

$$\underbrace{P(1-\alpha)A_i\,\ell^{-\alpha}}_{\text{valor prod. marg. del trabajo}} = \underbrace{w}_{\text{costo marg. del. trabajo.}} \longleftarrow \quad w\ell = P(1-\alpha)A_i\,\ell^{-\alpha}\cdot\ell$$

$$\frac{w\ell}{Py} = \frac{P(1-\alpha)A_i\,\ell^{-\alpha}\cdot\ell}{PA_j\,\ell^{1-\alpha}} = \frac{\cancel{P}(1-\alpha)\cancel{A_i}\,\cancel{\ell^{1-\alpha}}}{\cancel{PA_j}\,\cancel{\ell^{1-\alpha}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{w\ell^*}{Py^*} = (1-\alpha)} \longrightarrow$$ la fracción de ingresos de la firma que se destina a remunerar el trabajo es $(1-\alpha)$.

Cuánto se destina a ganancias de la firma?

$\dfrac{\pi^*}{Py^*}$?

$$\frac{\pi^*}{Py^*} = \frac{Py^* - w\ell^*}{Py^*} \Rightarrow \frac{\pi^*}{Py^*} = \cancelto{1}{\frac{Py^*}{Py^*}} - \cancelto{(1-\alpha)}{\frac{w\ell^*}{Py^*}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi^*}{Py^*} = 1-(1-\alpha) = \alpha}$$

Ingresos : Py^* $\longrightarrow$ α se va a ganancia
$\longrightarrow$ $(1-\alpha)$ se va a pagar el trabajo.

$$\boxed{y^*(w,p) = A_j\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \qquad \boxed{\pi^*(w,p) = \alpha PA_j\left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$$

$$\boxed{\pi^*(w,p) = \alpha p\, y^*(w,p)}$$

$$\boxed{\pi = \alpha P y}$$

3 interpretaciones para α:

- $(1-\alpha)$ es la elasticidad de prod. con respecto al
- α determina los rendimientos a escala.
- $(1-\alpha)$ es la fracción de ingresos que se destina a remunerar el trabajo.

$\ell^*(w,p) \to$ demanda laboral

$y^*(w,p) \to$ función de oferta

$\pi^*(w,p) \to$ función de ganancias.

Propiedad: $\ell^*(w,p)$ y $y^*(w,p)$ son homogéneas de grado 0:

$$\ell^*(\phi w, \phi p) = \ell^*(w,p)$$

$$y^*(\phi w, \phi p) = y^*(w,p)$$

Tomemos la condición de optimalidad:

$$p f_j'(\ell^*(w,p)) = w \quad . \quad \text{Sean } w' = \phi w,\ p' = \phi p.$$

$$\underbrace{\phi p}_{p'} f_j'(\ell^*(w,p)) = \underbrace{\phi w}_{w'} \implies p' f_j'(\ell^*(w,p)) = w'$$

Si salarios son w', p': $\underline{p'} f_j'(\ell^*(w',p')) = \underline{w'}$

Esto solo ocurre si $\ell^*(w',p') = \ell^*(w,p)$

$$\iff \boxed{\ell^*(\phi w, \phi p) = \ell^*(w,p)}$$

$$y^*(w,p) = f(\ell^*(w,p)) = f(\ell^*(\phi w, \phi p)) = y^*(\phi w, \phi p)$$

$$\boxed{y^*(w,p) = y^*(\phi w, \phi p)}$$

Propedad: $\pi^*(w,p)$ es homogénea de grado 1:

$$\pi^*(w,p) = \underbrace{p \cdot y^*(w,p)}_{\text{ingresos}} - \underbrace{w\,l^*(w,p)}_{\text{costos.}}$$

$$\pi^*(\phi w, \phi p) = (\phi p)\underbrace{y^*(\phi w, \phi p)}_{y^*(w,p)} - (\phi w)\underbrace{l^*(\phi w, \phi p)}_{l^*(w,p)}$$

$$= \phi p y^*(w,p) - \phi w l^*(w,p)$$

$$= \phi \underbrace{\left[p y^*(w,p) - w l^*(w,p)\right]}_{\pi^*(w,p)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi^*(\phi w, \phi p) = \phi\, \pi(w,p)} \longrightarrow \text{es homogénea de grado } 1.$$

$$\pi^*(w,p) = \alpha p A_i \left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

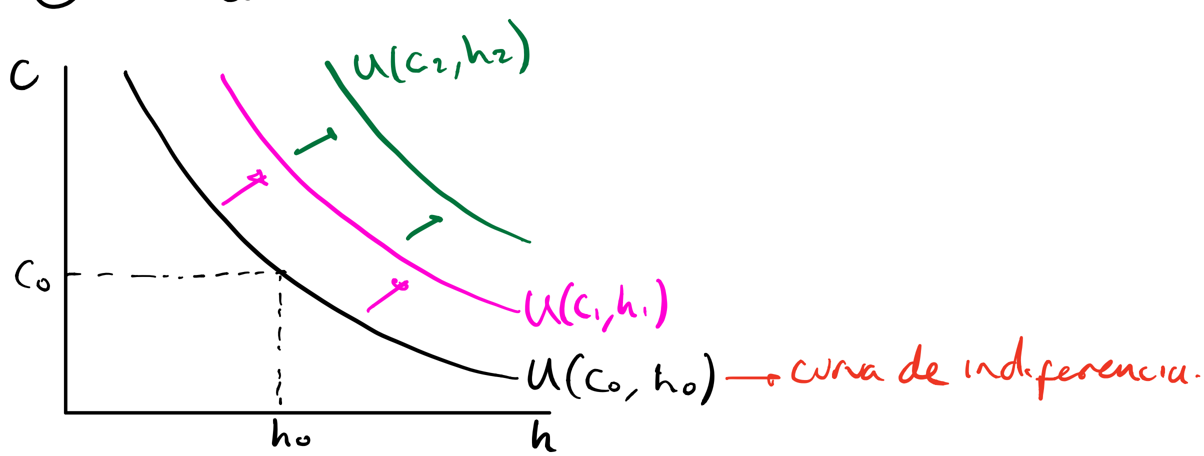
$$\pi^*(\phi w, \phi p) = \alpha(\phi p) A_i \left(\frac{(1-\alpha)A_i}{\cancel{\phi} w/\cancel{\phi} p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$= \phi\left[\alpha A_i \left(\frac{(1-\alpha)A_i}{w/p}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right] = \phi\, \pi^*(w,p).$$

$l^*(w,p)$ y $y^*(w,p)$ son homogéneas de grado 0.
$\pi^*(w,p)$ es homogénea de grado 1.

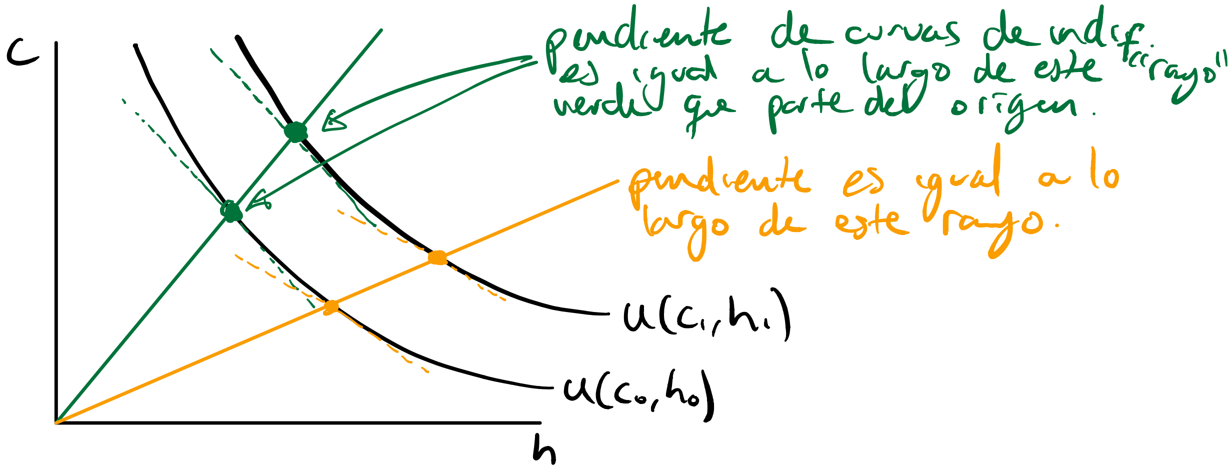
Problema del consumidor:

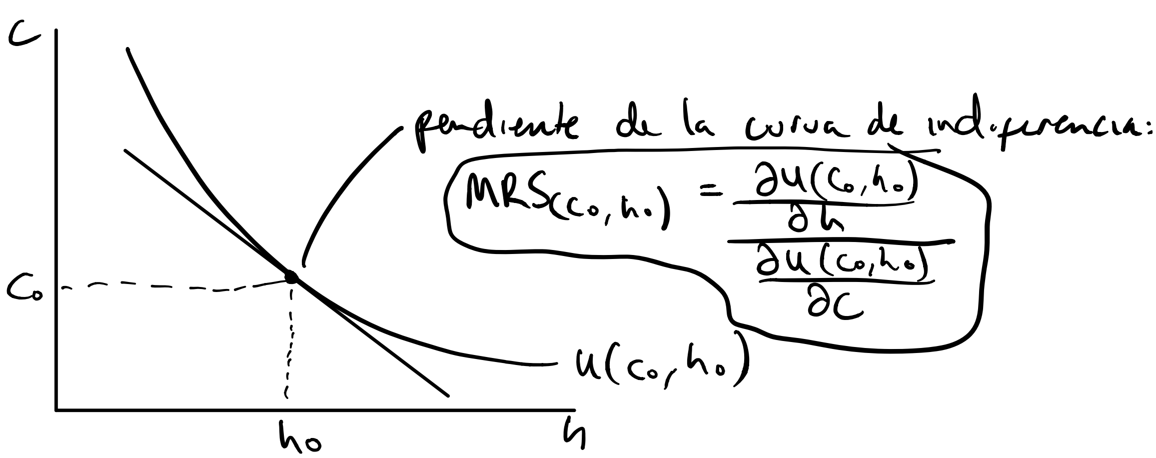
- En la economía hay I individuos, $i = \{1, \dots, I\}$.
- Consumidores derivan utilidad de 2 tipos de consumo:
  1. bien final: c
  2. ocio: h
- La función de utilidad es $U_i(c,h)$
- U_i satisface:
  1. Diferenciable.
  2. monótona creciente → "más es mejor"
  3. cuasicóncava.

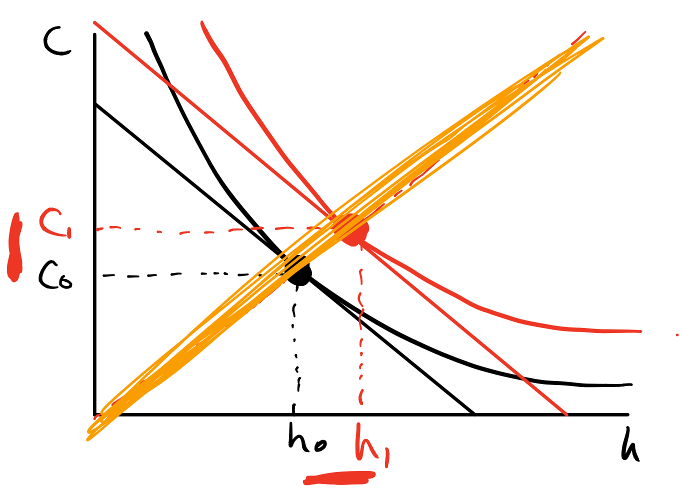


1. Curvas de indiferencia no tienen "esquinas"!
2. Utilidad aumenta a medida que nos alejamos del origen
3. las curvas de indiferencia son convexas respecto al origen.

Funciones de utilidad tipo CES, Cobb-Douglas también son homotéticas:







- Dotaciones: - Cantidad H_i de tiempo disponible que puede dedicar a ocio (h) o a trabajar (n)
  - Individuo i tiene θ_{ij} acciones en la empresa j. $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ para $i \in \{1, \dots, I\}$ $j \in \{1, \dots, J\}$.

$$\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} = 1 \quad \text{para } j \in \{1, \dots, J\}.$$

- Ganancias de las firmas se reparten entre sus accionistas
- Los hogares NO influyen en las decisiones de las firmas.

Problema del consumidor:

$$\max_{c,h,n} \; u_i(c,h) \quad \text{sujeto a:}$$

- $h + n = H_i$ ← restricción de tiempo
- $\underbrace{pc}_{\text{gasto en bien final}} = \underbrace{w n}_{\text{ingreso laboral}} + \underbrace{\sum_j \theta_{ij} \pi_j^*(w,p)}_{\text{ingresos no laborales / ingresos de capital.}}$

La restricción presupuestal.